ALTERNATOR
Misliti znanost.

# Trend sodobnih matematičnih besedil – vsebinska raznolikost, oblikovna poenotenost

20. 2. 2025

Številka: 03/2025

Avtor:

- Jurij Kovič




Ilustracija: Izar Lunaček

*© Izar Lunaček in ZRC SAZU, 2025. Vse pravice pridržane. Brez predhodnega pisnega dovoljenja imetnika avtorskih pravic ni dovoljeno reproduciranje, distribuiranje, javna priobčitev, predelava ali druga uporaba ilustracije v kakršnemkoli obsegu ali postopku.*

Število matematičnih področij, revij in objav danes raste z vse večjo hitrostjo in v obsegu, ki mu nihče ne more več slediti. Do neke mere lahko zaznavamo le spreminjanje oblikovnih parametrov matematičnih besedil, vsebinsko pa je vsak raziskovalec vse bolj omejen na svoje vse ožje specializirano raziskovalno področje. V prispevku bomo na kratko predstavili glavne vzroke za vse večjo vsebinsko in vse manjšo oblikovno raznovrstnost sodobnih matematičnih besedil.

Vseh matematičnih tekstov ne moremo metati v isti koš. Pri njihovem primerjanju moramo vselej razmisliti, za koga so bili napisani in kako jih lahko najustrezneje klasificiramo na podlagi vsebine, oblike in namena. Tako je npr. vsak znanstveni članek le zgoščen povzetek obsežne raziskave določenega problema, ki ozkemu krogu strokovnjakov z istega področja razumljivo predstavi bistvene izsledke. Podobno so matematični učbeniki le fragment dolgoletnih študijskih in predavateljskih izkušenj avtorjev; prinašajo izčiščen izbor in predstavitev definicij, izrekov, dokazov, primerov in nalog iz številnih in raznolikih virov, ki sicer obravnavajo isto tematiko, a na različne načine. Po drugi strani pa so ta besedila daljša in namenjena širšemu krogu bralcev, zato je tudi njihova struktura drugačna.

Spočetka, ko še ni bilo pisave, so matematiki svoje izsledke učencem posredovali ustno. Kasneje, na antičnih matematičnih šolah in akademijah, kot sta bili Platonova v Atenah ali Evklidova v Aleksandriji, so komunicirali tudi že s pismi in rokopisi. Antične rokopise so na roko kopirali še dolga stoletja. Gutenbergov izum tiska s premičnimi kovinskimi črkami leta 1439 je imel ključno vlogo pri znanstveni revoluciji in širjenju znanja med množice. Prva tiskana aritmetična knjiga je bila natisnjena leta 1478 v italijanskem Trevisu. Še do pred nekaj stoletji so si matematiki svoje izsledke sporočali v pismih, saj se je prva znanstvena revija in serijska publikacija – *Le Journal des sçavans* (https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k56523g) – pojavila šele leta 1665. Pregled razvoja matematičnega komuniciranja in literature (vključno z nastankom akademij in matematičnih združenj) do ustanovitve baze povzetkov *Mathematical Reviews* (https://www.ams.org/publications/math-reviews/math-reviews) leta 1940 podaja npr. članek Roberta A. Bartla *A Brief History of the Mathematical Literature* (https://www.ams.org/publications/math-reviews/BartleHistory.pdf) .

Pojem matematičnega besedila je sam po sebi preozek, da bi zmogel zajeti vse vrste matematičnih zapisov in objav. Problemi t. i. japonske tempeljske geometrije (https://doi.org/10.2307/j.ctv1pzk68d) so bili na primer narisani na lesenih ploščicah, ki so jih pripadniki vseh slojev v obdobju Edo (od okrog 1600 do 1868) kot izziv obiskovalcem brez kakršnegakoli besednega komentarja (ali pojasnila, kaj je sploh problem in kaj je rešitev) izobešali na pročelja šintoističnih in budističnih templjev.

Pri preučevanju oblikovne raznolikosti matematičnih besedil se je dobro zavedati tudi dejstva, da obstajata dve osnovni metodi reševanja matematičnih problemov: ena je osnovana pretežno na dokazovanju, druga pa na računanju. Primer prve metode je starogrški ideal strogega dokaza na podlagi definicij in aksiomov, najpopolneje uresničen v Evklidovih *Elementih* (https://plus.cobiss.net/cobiss/si/sl/bib/53330947) . Na Daljnem vzhodu so cvetele bolj računske kot dokazovalne metode, s katerimi pa so matematiki ravno tako lahko odkrivali nove rezultate. Tako je npr. matematik Nilakantha iz šole v Kerali okrog leta 1500 v knjigi *Tantra Sangraha* (https://archive.org/details/TantraSangrahaOfNilakantha/mode/2up) brez dokazov podal razvoj trigonometrijskih funkcij v obliki funkcijskih vrst. Tudi v sodobni matematiki je tak pristop pogost, npr. pri obsežnih izračunih z računalnikom. Obe metodi, dokazovalna in računska, imata svojo legitimnost, seveda pa do neke mere vplivata tudi na obliko matematičnega besedila – pretežno dokazovalni teksti praviloma vsebujejo več besedila in slik, pretežno računski pa več formul, tabel in številk. Obstajajo pa tudi teksti, ki kombinirajo oba vidika; tako je npr. George Boole (1815–1864) v svoji knjigi *The Laws of Thought* (https://archive.org/details/THELAWSOFTHOUGHTGeorgeBoole) (1854) z zelo izvirnim načinom razmišljanja močno razširil domet in uporabo logike ter vanjo kot orodje vnesel celo enačbe.

**Sodobna matematična besedila**

V drugi polovici 20. stoletja je močno naraslo število matematičnih revij in knjig, računalniška tehnologija, ki je doživela nesluten razcvet predvsem po 2. svetovni vojni, pa je hkrati omogočila vse večje sodelovanje avtorja tudi pri dokončni tipografski in vizualni obliki besedila. Danes so avtorjem na voljo številna druga pomagala, od jezikovne korekture angleškega teksta do člankov o zaželenem dobrem slogu pisanja matematičnih tekstov.

Zaradi silnega napredka matematike in zvišanja splošne matematične izobrazbene ravni so matematične publikacije danes tako po svoji strukturi in vsebini kot tudi po težavnosti in ciljni publiki bolj različne kot kadarkoli prej.

Kot protiutež temu pospešenemu povečevanju raznovrstnosti pa zahteve matematičnih revij glede končne oblike prispevkov postajajo vse bolj strogo določene, zaradi česar so si različni članki med seboj (kljub vse bolj raznolikim in specializiranim vsebinam) oblikovno vse bolj podobni. V večini mednarodnih matematičnih revij mora biti prispevek napisan v angleščini in oblikovan s programom *Tex*, ki med drugim omogoča jasen izpis matematičnih formul in preprost uvoz slik iz programa *GeoGebra* (https://www.geogebra.org/) . Povzetku morata slediti seznam ključnih besed in navedba v članku obravnavanih tem po klasifikaciji MSC 2020. Vsak avtor mora imeti svojo ORCID številko. Zahvaliti se mora recenzentom in ustanovam, ki ga financirajo, v uvodu pa mora predstaviti osnovne pojme, glavni problem in strukturo članka. Temu navadno sledita razdelka »Glavni rezultat« in »Zaključek«, kjer so predstavljeni tudi odprti problemi. V razdelku »Literatura« mora avtor citirati vse članke, vključno z njihovimi MR- ali DOI-številkami. Pogosti so tudi pregledni članki, ki povzemajo trenutno stanje na določenem raziskovalnem področju.

Zvišani standardi in zahteve revij do avtorjev in recenzentov ter spletna orodja, kot je npr. baza povzetkov člankov *Mathematical Reviews*, so močno pripomogli k boljši oblikovni kakovosti člankov, natančnejšemu citiranju znanstvene in strokovne literature, učinkovitejšemu odkrivanju plagiranja in avtoplagiranja pa tudi k hitrejši odločitvi raziskovalcev (na podlagi prebranega povzetka), ali je določen tekst relevanten za potrebe njihove trenutne raziskave.

Po drugi strani ima takšen sodoben sistem matematičnega raziskovanja, pisanja in objavljanja, vključno z vrednotenjem člankov izključno glede na faktor vpliva revij, v katerih so objavljeni, ter na število citatov, ki jih zberejo, tudi nekatere negativne posledice. Zloglasna akademska krilatica »Objavi ali umri!« (angl. *Publish or perish!*) vodi do porasta vsebinsko nepomembnih člankov, napisanih le zaradi točk, ki se upoštevajo pri napredovanju v nazive. Matematiki na univerzah velik del svojega časa za raziskovanje odmerjajo pisanju vse zahtevnejših prijav za večletne raziskovalne projekte. Pri tem pogosto pragmatično izbirajo tista področja in teme, ki imajo glede na pretekle izkušnje z razpisi največjo možnost, da pridobijo finančna sredstva. Pri izračunavanju faktorja vpliva posamezne revije se upošteva le število citiranj v njej objavljenih člankov zadnjih dveh let. Mnoge revije od avtorjev zahtevajo plačilo za objavo kot ceno za t. i. odprti dostop, a teh stroškov fakultete, kjer so ti zaposleni, niso vselej pripravljene poravnati. Vse večje število matematičnih člankov ima vse več avtorjev, ki pa h končnemu rezultatu ne prispevajo enako. Težje matematične probleme danes skupaj koordinirano

rešuje po deset ali celo sto raziskovalcev. Za matematične »amaterje«, ki so s svojimi izvirnimi idejami praktično skozi vso zgodovino matematike pomembno pripomogli k njenemu razvoju (pomislimo samo na Fermata, Pascala, Mersenna), v revijah ni več prostora, matematiko lahko danes objavljajo le še »profesionalci«.

Več oblikovne raznolikosti kot v znanstvenih člankih zasledimo v novejših matematičnih učbenikih, ki poleg klasične teoretične predstavitve določenega področja vse pogosteje uporabljajo modernejše in bolj praktične pristope, npr. spletno podporo, ki omogoča generiranje individualiziranih nalog z drugačnimi številskimi podatki za vsakega študenta. Poudarjajo tudi kritično primerjanje različnih metod za reševanje istega problema, saj npr. pri reševanju sistemov 1000 linearnih enačb s 1000 neznankami ni več vseeno, ali uporabimo hitro ali počasno metodo.

**Starejša matematična besedila**

Če bodisi namenoma bodisi slučajno posežemo po starejših matematičnih revijah in knjigah, ki ob vse večjem pomanjkanju prostora za nove publikacije še niso pristale v javnosti nedostopnih skladiščih univerzitetnih matematičnih knjižnic, bomo v njih sicer našli veliko manj raznovrstnih vsebin, zato pa veliko več raznolikih načinov predstavitve. Matematična besedila so vselej svojevrstno zrcalo časa in okolja, v katerem so nastala. Ko so npr. italijanski matematiki 14. in 15. stoletja reševali enačbe 3. in 4. stopnje, nekateri izmed njih svojih metod niso želeli javno razkriti, saj bi jim to odvzelo prednost pred konkurenti. Pot do današnjega široko uveljavljenega načela, naj bodo znanstveni izsledki dostopni vsem, je bila dolga tudi v matematiki. Podobna dilema se ponavlja pri aktualnem vprašanju, ali naj bodo računalniške kode algoritmov, ki izdatno posegajo v naša življenja, prosto dostopne ali ne.

Razumevanje starejših matematičnih besedil, ki dostikrat uporabljajo drugačne matematične simbole in pojme, kot so v veljavi danes, zahteva določene izkušnje, veščine in potrpljenje. Ta besedila so pogosto zapisana v tujih ali celo mrtvih jezikih, npr. v latinščini, in z drugačnimi simboli, oznakami in pojmi, kot smo jih vajeni danes.

Razumevanje lahko sodobnemu bralcu otežujejo tudi drugačne navade oziroma standardi pisanja matematičnih tekstov v določenem času in okolju. Ustvarjalna misel nekaterih avtorjev je bila precej pred njihovim časom in v takratnem izrazoslovju in simbolih ni bilo ničesar, kar bi lahko ustrezno zajelo in izrazilo njihove ideje. Évariste Galois (1811–1832) je v noči pred zanj usodnim dvobojem v vročični naglici zapisal svoje ideje, ki so se, le s težavo dešifrirane, šele čez čas izkazale za prelomne. Med drugim je izumil izredno pomemben pojem grupe, temeljno orodje za raziskovanje simetrij. Njegove tekste so takratni ugledni matematiki označili za preveč nejasne, da bi lahko presojali o njihovi tehtnosti.

**Različni dokazi istega matematičnega izreka pripomorejo k boljšemu razumevanju**

Matematična spoznanja se s časom poglabljajo in razširjajo. Posledično zorijo tudi matematična besedila, ki poročajo o teh dognanjih; celo dokazi in pojmi, ki nastopajo v trditvah in izrekih, lahko doživijo večkratno preobrazbo. Imre Lakatos (1922–1974) je to tezo razvil in nazorno predstavil v svoji doktorski disertaciji in kasneje knjigi *Proofs and Refutations* (https://www.cambridge.org/core/books/proofs-and-refutations/575FC8A6B4FAB79E649EDF5FBB9C6E10) (1976), napisani v obliki pogovora učitelja in učencev, ki se vrti okrog enega izmed osnovnih izrekov v topologiji, Eulerjeve poliedrske formule $v - e + f = 2$, kjer je $v$ število vozlišč, $e$ število robov in $f$ število lic poliedra. Matematikom so šele odkritja različnih protiprimerov razkrila, da ta formula ne velja za vse poliedre in da so v dokazih, ki so se prej zdeli neoporečni, vrzeli; to je vodilo k strožjim dokazom, večkratni redefiniciji pojma poliedra ter k natančnejši formulaciji premis in zaključkov.

Francoski matematik Fermat (1601–1665) je svoje matematične rezultate podajal brez dokazov. Leonhard Euler (1707–1783), najplodovitejši matematik vseh časov, ki je s pisanjem knjig za širše občinstvo veliko naredil tudi za popularizacijo matematike, je marsikdaj poleg tega, da je podal dokaz nekega novega rezultata, opisal tudi, kako je do njega prišel. To v sodobnih matematičnih člankih včasih manjka: dokazi izrekov so (v smislu Gaussove krilatice, da je treba zidarske odre podreti, ko je stavba zgrajena) podani brez razlage, kako oziroma na podlagi kakšne ideje so bili odkriti, ali pa so novi pojmi in simboli vpeljani brez utemeljitve, zakaj so potrebni oziroma za kaj so uporabni.

Mnogi izreki, kot je npr. Morleyjev, odkrit leta 1900, prvič dokazan pa 1909, imajo veliko različnih dokazov: analitičnih, geometrijskih, z uporabo kompleksnih števil itd. S širjenjem matematičnega znanja in razvojem novih metod se dokazi matematičnih trditev vse bolj krajšajo in poenostavljajo. Tako je dokaz izreka, ki je izvorno obsegal celotno doktorsko delo, npr. Gaussov osnovni izrek algebre iz leta 1799, katerega prvi neoporečni dokaz je dal šele Argand leta 1806, danes bistveno lažji, če se sklicujemo na kasneje odkrite izreke, iz katerih sledi. Osnovni izrek algebre je tudi eden od primerov izreka, za katerega so najprej našli eksistenčni dokaz, šele kasneje pa tudi konstruktivne dokaze (prvega je podal Weierstrass leta 1891).

Čeprav se zdi nesmiselno dokazovati že dokazano, matematiki posebej cenijo t. i. lepe dokaze, ki poleg svoje temeljne naloge (potrditi, da je nekaj res) tudi nazorno pojasnijo, zakaj je nekaj res. Danes že obstajajo računalniški sistemi, ki kot vhodne podatke sprejmejo aksiome določene matematične teorije, potem pa po zakonih matematične logike izpeljujejo posledice in certificirajo že dokazane izreke, ki so jih matematiki prvotno dokazali na druge načine. Odkrivajo lahko tudi nove izreke. Sloviti sto let nedokazani izrek štirih barv sta Kenneth Appel in Wolfgang Haken s pomočjo računalnika dokazala (https://doi.org/10.1215/ijm/1256049011) šele v sedemdesetih letih 20. stoletja. Vse to je bilo še do pred nekaj desetletji nepredstavljivo. V širši zgodovinski perspektivi pa je to le vračanje k že omenjeni, bolj računsko usmerjeni koncepciji matematike stare Kitajske in Indije.

Raznolikost oblik matematičnih besedil skozi zgodovino je vselej tudi odraz spremenljivega pomena in vloge matematičnih raziskav v določeni družbi in času. Primerjava oblikovnih značilnosti sodobnih in starejših matematičnih besedil, predstavljena v tem prispevku, je ena od možnih poti k boljšemu razumevanju te še veliko premalo raziskane tematike.

* To delo je delno podprto s strani ARIS (raziskovalni program P1-0294 in raziskovalni projekt J1-4351).

https://www.alternator.science/sl/daljse/trend-sodobnih-matematicnih-besedil-vsebinska-raznolikost-oblikovna-poenotenost/